

1. Докажите, что если $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$, то $x + y = 0$.
2. Существует ли многочлен $P \in \mathbb{Z}[x]$ такой, что верны равенства $P(1 + \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}$ и $P(3 + \sqrt{5}) = 3 + \sqrt{5}$?
3. Натуральное число n можно представить и в виде $[a\sqrt{10}]$ с некоторым натуральным a , и в виде $[b\sqrt{11}]$ с некоторым натуральным b . Докажите, что n можно представить в виде $[c(11\sqrt{10} - 10\sqrt{11})]$ с некоторым натуральным c .
4. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ удовлетворяют равенствам $P(0) = 1$ и $(P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x)$. Найдите коэффициент при x^{99} в многочлене $(P(x) + 1)^{100}$.
5. Докажите, что для каждого натурального числа n существуют многочлены $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ такие, что $\deg f = n$ и при всех $x \in \mathbb{R}$ верно равенство $(f(x))^2 = (x^2 - 1)(g(x))^2 + 1$.
6. Докажите, что для каждого натурального числа n существуют ненулевые многочлены $P, Q \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, такие что $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)P(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$.
7. Найдите все натуральные числа d , для которых найдутся многочлены $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ такие, что $\deg P = d$ и при всех $x \in \mathbb{R}$ верно равенство $(P(x))^2 + 1 = (x^2 + 1)(Q(x))^2$.
8. $P(x)$ и $Q(x)$ – непостоянные приведённые многочлены. Докажите, что сумма квадратов коэффициентов многочлена $P(x)Q(x)$ не меньше $((P(0))^2 + (Q(0))^2)$.
9. Пусть a_1, \dots, a_n – натуральные числа. Докажите, что $\sqrt{a_1} + \dots + \sqrt{a_n}$ – натуральное число, если и только если каждое $a_i, i = \overline{1, n}$, – полный квадрат.